Paraqitja e numrit natyror me shifra

Teoremë. Çdo numër natyror a paraqitet në mënyrë të vetme në trajtën :

$a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + ... + a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g + a_0$ ku $1 \leq a_n < g$ dhe $0 \leq a_i < g$ për $i=0,1,...n-1$dhe $g>1$

Vërtetim. Nëse $a<g$ atëherë $a=a_0$ dhe $n=0$

Nëse $a \geq g$ atëherë bëjmë pjestimin e a me g dhe kemi $a=q_1 \cdot g+r_0$ ku $0 \leq r_0 < g$. Nëse $q_1<g$ atëherë a u paraqit në trajtën që thotë teorema ku $a_0=r_0$, $a_1=q_1$ dhe $n=1$.

Nëse $q_1 \geq g$ pjesëtojmë q_1 me g dhe kemi $q_1=q_2 \cdot g+r_1$ ku $0 \leq r_1 < g$. Në këtë rast, paraqitja e a do të jetë $a=q_1 \cdot g+r_0 =(q_2 \cdot g+r_1) \cdot g+r_0=q_2 \cdot g^2+r_1 \cdot g+r_0$. Në këtë rast $n=2$, $a_2=q_2$, $a_1=r_1$ dhe $a_0=r_0$. Provohet lehtë se $q_1 > q_2$.

Nëse $q_2 \geq g$ pjesëtojmë q_2 me g. Ky proces ka fumd pasi në rast të kundërt do të kishim herësat $q_1, q_2, ... q_n$ të tillë që $a>q_1>q_2>.......q_n>g>1$ që do të thotë se ndërnjet numrave 1 dhe a ka njëpafundësi numrash natyrorë, gjë që është e pamundur.

Pra procesi do të përfundojë në një hap të n-të kështu që kemi:

$a=q_1 \cdot g+r_0$ $\qquad 0 \leq r_0 < g$

$q_1=q_2 \cdot g+r_1$ $\qquad 0 \leq r_1 < g$

....

$q_{n-2}=q_{n-1} \cdot g+r_{n-2}$ $\qquad 0 \leq r_{n-2} < g$

$q_{n-1}=q_n \cdot g+r_{n-1}$ $\qquad 0 \leq r_{n-1} < g$ dhe $1 \leq q_n < g$ (q_n nuk mund të jetë 0 pasi në këtë rast q_{n-1} do të jetë me i vogël se g dhe procesi i pjesëtimit duhet të mbaronte më sipër).

Shumëzojmë të dy anët e barazimit të dytë me g, të dy anët e barazimit të tretë me g^2 dhe atë të fundit me g^{n-1}:

$a=q_1 \cdot g+r_0 \qquad 0 \le r_0 < g$

$q_1 \cdot g=q_2 \cdot g^2+r_1 \cdot g \qquad 0 \le r_1 < g$

....

$q_{n-2} \cdot g^{n-2}=q_{n-1} \cdot g^{n-1}+r_{n-2} \cdot g^{n-2} \qquad 0 \le r_{n-2} < g$

$q_{n-1} \cdot g^{n-1}=q_n \cdot g^n+r_{n-1} \cdot g^{n-1} \qquad 0 \le r_{n-1} < g$ dhe $1 \le q_n < g$

Duke i mledhur anë për anë këto barazime dhe duke bërë thjeshtimet e duhura marrim:

$a= q_n \cdot g^n+ r_{n-1} \cdot g^{n-1}+ r_{n-2} \cdot g^{n-2}+\ldots\ldots +r_1 \cdot g+ r_0$ i cili përbën praqitjen e numrit natyror a sipas trajtës që thotë teorema pasi $1 \le q_n < g$ dhe $0 \le r_i < g$ për $i=0,1,2,\ldots\ldots n-1$.

Tani le të provojmë se kjo paraqitje është e vetme.

Supozojmë se

$a= a_n \cdot g^n+a_{n-1} \cdot g^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_2 \cdot g^2+a_1 \cdot g+a_0 =b_n \cdot g^n+b_{n-1} \cdot g^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+b_2 \cdot g^2+b_1 \cdot g+b_0$

Atëherë mund të shkruajmë që :

$a= (a_n \cdot g^{n-1}+a_{n-1} \cdot g^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_2 \cdot g+a_1) \cdot g+a_0 =(b_n \cdot g^{n-1}+b_{n-2} \cdot g^{n-2}+\ldots\ldots\ldots b_2 \cdot g +b_1) \cdot g+b_0$

Nga uniciteti i herësit dhe mbetjes kemi $a_0=b_0$ dhe

$$a_n \cdot g^{n-1}+a_{n-1} \cdot g^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_2 \cdot g+a_1= b_n \cdot g^{n-1}+b_{n-1} \cdot g^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+b_2 \cdot g^2+b_1$$

Duke vazhduar në mënrë të njëjtë do të gjejmë se $a_1=b_1$, $a_2=b_2,\ldots\ldots a_n=b_n$, barazime që flasin për unicitetin e paraqitjes së numrit natyror a sipas trajtës që thotë teorema.

Vërejtje

Paraqitja a= $a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_2 \cdot g^2 + a_1 \cdot g + a_0$ shënohet a a= $\overline{(a_n a_{n-1} \ldots \ldots .. a_1 a_0)}_g$ Numrat a_1 për i=0,1,2...n quhen shifra me vlerë ndërsa trajta a= $\overline{(a_n a_{n-1} \ldots \ldots .. a_1 a_0)}_g$ quhet paraqitje e numrit natyror a me shifra në sistemin me bazë g.

Shifra a_0 quhet shifër e rendit të parë, a_1 shifër e rendit të dytë,..a_n shifër e rendit n+1.

Sistemet pozicionale të numërimit me bazë të çfarëdoshme

Në paraqitjen me shifra të një numri a në një sistem me bazë g,

a= $\overline{(a_n a_{n-1} \ldots \ldots .. a_1 a_0)}_g$ nevojiten shenja të ndryshme për paraqitjen e shifrave. Kështu për sistemin me bazë 10 shenjat për shifrat janë 0,1,2....9 dhe paraqitja me shifra e një numri natyror është

a= $\overline{(a_n a_{n-1} \ldots \ldots .. a_1 a_0)}_{10}$ dhe ne zakonisht duke nënkuptuar bazën 10 këtë paraqitje e japim në trajtën $a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_1 a_0$.

Kështu 1278 është paraqitja me shifra në sistemin dhjetor të numrit natyror përkatës, i cili shkruhet në trajtë shume $1278 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8$.

Numri natyror paraqitja me anë të shifrave e të cilit në sistemin me bazë 6 është 403_6 është shuma $4 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6 + 3$.

Vlera e çdo shifre në paraqitjen $\overline{(a_n a_{n-1} \ldots \ldots .. a_1 a_0)}_g$ përcaktohet nga pozicioni që ajo zë në këtë paraqitje, prandaj themi se kemi të bëjmë me një sistem pozicional me bazë g.

Paraqitja me shifra e numrave natyrorë në sistemin pozicional dhjetor sjell lehtësi edhe për leximin e tyre. Nëse numrat nuk kanë më shumë se tre shifra, lexohen me rradhë shifrat duke filluar nga ajo e rendit më të lartë. Leximi i shifrës shoqërohet me përmendjen e njësisë përkatëse. Shifrat zero kapërcehen gjatë leximit. Kështu 247 lexon dyqind e katërdhjetë e shatë, ndërsa 906 lexon nëntë qind e gjashtë.

Për leximin e numrave me më më shumë se tre shifra përdoret koncepti i klasave. Tri njësitë e rendeve të para, pra njëshet, dhjetëshet dhe qindëshet, formojnë klasën e njësheve. Tri njësitë pasuese formojnë klasën e mijsheve, ndërsa shifrat e tyre rendet e mijsheve,dhjetëmijsheve dhe qindmijsheve. Më pas është klasa milionsheve, miliardave, triliardave, etj.

Duhet theksuar se gjatë zhvillimit të shoqërisë njerëzore janë përdorur sisteme të ndryshme pozicionale numërimi si ato me bazë 12 dhe 20. Në informatikë përdoret gjërësisht sistemi i numërimit me bazë 2.

Ushtrimi nr. 1

Konvertoni numrat e mëposhtëm në sistemin me bazë 10.

a) $(123)_5$

$(123)_5 = 1\cdot 5^2 + 2\cdot 5 + 3 = 25 + 10 + 3 = 38$

b) $(1101101)_2$

$(1101101)_2 = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1 = 64 + 32 + 8 + 4 + 1 = 109$

c) $(1A1)_{12}$

$(1A1)_{12} = 1\cdot 12^2 + A\cdot 12 + 1 = 144 + A\cdot 12 + 1 = 144 + 10\cdot 12 + 1 = 144 + 120 + 1 = 265$

d) $(3012)_4$

$(3012)_4 = 3\cdot 4^3 + 0\cdot 4^2 + 1\cdot 4 + 2 = 3\cdot 64 + 0 + 4 + 2 = 192 + 4 + 2 = 198$

e) $(5013)_6$

$(5013)_6 = 5\cdot 6^3 + 0\cdot 6^2 + 1\cdot 6 + 3 = 5\cdot 216 + 0 + 6 + 3 = 1080 + 9 = 1089$

f) $(111011)_3$

$(111011)_3 = 1\cdot 3^5 + 1\cdot 3^4 + 1\cdot 3^3 + 0\cdot 3^2 + 1\cdot 3 + 1 = 243 + 81 + 27 + 0 + 3 + 1$

$= 243 + 112 = 355$

g) $(1000110)_8$

$(1000110)_8 = 1\cdot 8^6 + 0\cdot 8^5 + 0\cdot 8^4 + 0\cdot 8^3 + 1\cdot 8^2 + 1\cdot 8 + 0$

$= 262216$

h) $(ABCE)_{16}$

$(ABCE)_{16} = A\cdot 16^3 + B\cdot 16^2 + C\cdot 16 + E = 10\cdot 16^3 + 11\cdot 16^2 + 12\cdot 16 + 14$

$= 43982$

Konvertimi i nr. nga sistemi me bazë a në sistemin me bazë b.

Së pari, numrin $n = (a_0 a_1 \ldots a_{m-1})_a$, e kalojmë në sistemin me bazë 10 pra:

$$n = (a_0 a_1 \ldots a_{m-1})_a = a_0 \cdot a^{m-1} + a_1 \cdot a^{m-2} + \ldots + a_{m-2} \cdot a + a_{m-1}$$

Më pas, nr. n në sistemin me bazë 10, e kalojmë në sistemin me bazë b sipas procedurës së mëposhtme,

- Gjendet $\max\{k \in N_0 / b^k \le n\} = k_0$. Shifra e parë b_0 është $\max\{b' \in N / b' \cdot b^{k_0} \le n\}$.
- Më pas përsëritet e njëjta procedurë për nr. $n - b_0 \cdot b^{k_0}$ (në vend të nr. n). Gjendet $\max\{k \in N_0 / b^k \le n - b_0 \cdot b^{k_0}\} = k_1$.
  Nqs $k_0 - k_1 = 1$ atherë b_1 gjendet në analogji me sipër
  Nqs $k_0 - k_1 > 1$ atherë $b_1 = 0, \ldots, b_{k_0-k-1} = 0$ dhe b_{k_0-k} gjendet më analogji me sipër.
- Procedura mbaron kur numri i fundit "n" është më i vogël se baza b.

Ushtrimi nr. 2

Konvertoni numrat:

a) $(341)_5 \to (10120)_3$

$(341)_5 = 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 1 = 3 \cdot 25 + 20 + 1 = 75 + 20 + 1 = 96$

Tani 96 do ta kthejmë në sistemin me bazë 3.

- $3^k \le 96 \Rightarrow k_0 = 4 \Rightarrow b' \cdot 3^4 \le 96$ pra $b' \cdot 81 \le 96 \Rightarrow \boxed{b_0 = 1}$
- $3^k \le 96 - 1 \cdot 3^4$ pra $3^k \le 15 \Rightarrow k_1 = 2 \Rightarrow \boxed{b_1 = 0}$ ndërsa b_2 kërkohet më analogji me sipër, pra $b' \cdot 3^2 \le 15 \Rightarrow \boxed{b_2 = 1}$
- $3^k \le 15 - 1 \cdot 3^2$ pra $3^k \le 6 \Rightarrow k_2 = 1 \Rightarrow b' \cdot 3^1 \le 6$ pra $b' \cdot 3 \le 6 \Rightarrow$ $\boxed{b_3 = 2}$

• $6 - 2 \cdot 3^1 = 6 - 6 = 0 < 3 \Rightarrow b_4 = 0$ është shifra e fundit $\Rightarrow$

$(341)_5 = (10120)_3$

b) $(AC1)_{14} \rightarrow (1666)_{11}$

Fillimisht kthejmë nr. $(AC1)_{14}$ në bazën 10:

$(AC1)_{14} = A \cdot 14^2 + C \cdot 14 + 1 = 10 \cdot 196 + 12 \cdot 14 + 1 = 2129$

Tani do të kthejmë nr. $(2129)_{10}$ në sistemin me bazë 11:

• $11^k \leq 2129 \Rightarrow k_0 = 3 \Rightarrow b' \cdot 11^3 = b' \cdot 1331 \leq 2129 \Rightarrow \boxed{b_0 = 1}$

• $11^k \leq 2129 - 1 \cdot 11^3 = 798$ pra $11^k \leq 798 \Rightarrow k_1 = 2 \Rightarrow$

$b' \cdot 11^2 \leq 798$ pra $b' \cdot 121 \leq 798 \Rightarrow \boxed{b_1 = 6}$

• $11^k \leq 798 - 6 \cdot 11^2$ pra $11^k \leq 72 \Rightarrow k_2 = 1 \Rightarrow b' \cdot 11^1 \leq 72 \Rightarrow$

$\boxed{b_2 = 6}$

• $72 - 6 \cdot 11^1 = 72 - 66 = 6 < 11 \Rightarrow \boxed{b_3 = 6} \Rightarrow$

$(AC1)_{14} = (1666)_{11}$

c) $(100101)_3 \rightarrow (11111101)_2$

Fillimisht kthejmë nr. $(100101)_3$ në bazë 10:

$(100101)_3 = 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 1 = 253$

Tani kthejmë $(253)_{10}$ në bazën 2.

- $2^k \leq 253 \Rightarrow k_0 = 7 \Rightarrow b' \cdot 2^7 \leq 253$ pra $b' \cdot 128 \leq 253 \Rightarrow$

$\boxed{b_0 = 1}$

- $2^k \leq 253 - 1 \cdot 2^7$ pra $2^k \leq 125 \Rightarrow k_1 = 6 \Rightarrow b' \cdot 2^6 \leq 125 \Leftrightarrow$

$b' \cdot 64 \leq 125 \Rightarrow \boxed{b_1 = 1}$

- $2^k \leq 125 - 1 \cdot 2^6$ pra $2^k \leq 61 \Rightarrow k_2 = 5 \Rightarrow b' \cdot 2^5 \leq 61$ pra

$b' \cdot 32 \leq 61 \Rightarrow \boxed{b_2 = 1}$

- $2^k \leq 61 - 1 \cdot 2^5$ pra $2^k \leq 29 \Rightarrow k_3 = 4 \Rightarrow b' \cdot 2^4 \leq 29$ pra

$b' \cdot 16 \leq 29 \Rightarrow \boxed{b_3 = 1}$

- $2^k \leq 29 - 1 \cdot 2^4$ pra $2^k \leq 13 \Rightarrow k_4 = 3 \Rightarrow b' \cdot 2^3 \leq 13$ pra

$b' \cdot 8 \leq 13 \Rightarrow \boxed{b_4 = 1}$

- $2^k \leq 13 - 1 \cdot 2^3$ pra $2^k \leq 5 \Rightarrow k_5 = 2 \Rightarrow b' \cdot 2^2 \leq 5$ pra

$b' \cdot 4 \leq 5 \Rightarrow \boxed{b_5 = 1}$

- $2^k \leq 5 - 1 \cdot 2^2$ pra $2^k \leq 1 \Rightarrow k_6 = 0 \Rightarrow \boxed{b_6 = 0}$ dhe

meqë $1 < 2 \Rightarrow \boxed{b_7 = 1} \Rightarrow$

$(100101)_3 = (11111101)_2$